

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales constituyen un área de la Matemática que trata de explicar los procesos en movimiento, es decir, estudia los sistemas cuyos estados cambian con el tiempo (proceso de cambio evolutivo o dinámico). Esta dinámica permite, de alguna manera, dar respuesta a preguntas sobre las fuerzas que generan el cambio, por qué ocurre, cómo evoluciona un sistema debido al cambio y cómo puede ser controlado.

Las ecuaciones diferenciales, generalmente se han desarrollado en las ciencias naturales y progresivamente se ha aplicado en las ciencias sociales. Desde 1980 surge el interés en el campo de la Economía, para el estudio del comportamiento de variables económicas, por ejemplo la convergencia temporal de las variables hacía los valores de equilibrio, este último es un tema de interés en Dinámica Económica.

Una ecuación diferencial estará constituido por:

- *una o más* ***variables independientes*** *respecto a los cuales varía el sistema.*
- *una o mas* ***variables de estado****, estas cambian respecto a las variables independientes.*
  - *Si hay una sola variable independiente, entonces la ecuación diferencial toma el nombre de: ecuación diferencial ordinarias (EDO)*
  - *Si hay mas de una variable independiente, entonces la ecuación diferencial toma el nombre de: ecuación en derivadas parciales (EDP)*

Como podemos notar, una ecuación diferencial o sistema dinámico puede variar respecto a dos o más variables independientes. En economía, generalmente, se emplean sistemas dinámicos ordinarios, pero existen ejemplos de sistemas en derivadas parciales como el modelo de Black and Scholes (1973) para la variación de opciones financieras.

A continuación presentamos dos ejemplos simples donde aparecen las ecuaciones diferenciales, posteriormente presentaremos ejemplos donde aparecen las ecuaciones diferenciales ordinarias más comunes en Economía.

Ejemplo 1. Supongamos que el coste marginal de un producto, en función de la cantidad producida q, está dado por la función

$$f(q) = q^3 + 3q.$$

Se desea **encontrar la función de costo del producto** si éste cuenta con un costo fijo de 10 u.m.

Solución. Sea C la función costo de producción. El costo marginal está dado por la derivada de C, esto es:

$$C'(q) = \frac{dC}{dq} = f(q) = q^3 + 3q \tag{1}$$

Lo cual es equivalente a escribir

$$\underbrace{C'(q) - q^3 - 3q}_{F(q,C(q),C'(q))} = 0$$

Por otro lado, se tiene el costo fijo $C(0) = 10$.

Entonces para hallar la función costo $C(q)$, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} F(q, C(q), C'(q)) & = & 0 \\ C(0) & = & 10 \end{cases}$$

□

Observación 1. En el ejemplo anterior, la ecuación

$$F\left(q, C(q), C'(q)\right) = C' - q^3 - 3q = 0,$$

es una ecuación diferencial. Observe que, hay solo una variable independiente q, luego la ecuación diferencial es una Ecuación Diferencial Ordinaria. La condición $C(0) = 10$ es llamada **condición inicial** del sistema.

Ejemplo 2. Se tiene una empresa que fabrica un producto usando dos insumos L, K. Se desea encontrar la función de producción $Q(L, K)$, que maximiza los beneficios de la empresa, si se sabe que la nómina total w, y el interés total r, sobre capital invertido K, son proporciones constantes del output (producción total). Es decir, si α y β son estas proporciones, entonces

$$\begin{cases} rK & = & \beta Q \\ wL & = & \alpha Q \end{cases} \tag{2}$$

Solución. Sabemos que el beneficio de la empresa está dada por

$$\pi(L, K) = Ingreso_t - Costo_t = p \cdot Q(L, K) - (rK + wL)$$

Una condición necesaria para el beneficio sea máximo es que

$$\nabla\pi = (0, 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial L} & = & \frac{w}{p} \\ \frac{\partial Q}{\partial K} & = & \frac{r}{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p\frac{\partial Q}{\partial L} = w \qquad p\frac{\partial Q}{\partial K} = r \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2), obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot K & = & \beta Q \\ p \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot L & = & \alpha Q \end{cases}$$

o lo mismo a escribir

$$\underbrace{p \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot L - \alpha Q}_{f\left((L,K),Q(K,L),\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)\right)} = 0$$

$$\underbrace{p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot K - \beta Q}_{g\left((L,K),Q(K,L),\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)\right)} = 0$$

Luego para hallar la función de producción que maximiza los beneficios de la empresa, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} f\left((L,K),Q(K,L),\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)\right) & = & 0 \\ g\left((L,K),Q(K,L),\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)\right) & = & 0 \end{cases}$$

Si definimos la función

$$F = (f,g) = F\left((L,K),Q(L,K),\frac{\partial Q}{\partial L},\frac{\partial Q}{\partial K}\right) = (0,0)$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver la ecuación

$$F\left(L,K,Q,\frac{\partial Q}{\partial L},\frac{\partial Q}{\partial K}\right) = (0,0)$$

□

Observación 2.

- En el primer ejemplo, haciendo $t = q, x(t) = C(q)$, obtenemos la ecuación diferencial

  $$F\left(t,x(t),x'(t)\right) = x' - t^3 - 3t = 0$$

  o lo mismo que

  $$\dot{x} - t^3 - 3t = 0$$

  La cual representa una EDO.
  Observe que $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 1 \neq 0$, por el teorema de la función implícita se sigue que $\dot{x}$ se puede escribir como una función que depende de las otras variables, es decir

  $$\dot{x} = f(t,x) = t^3 + 3t$$

- En el segundo ejemplo, haciendo $(t_1,t_2) = (K,L),\ x(t_1,t_2) = Q(K,L)$, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

  $$\begin{cases} f\left(t_1,t_2,x,\frac{\partial x}{\partial t_1},\frac{\partial x}{\partial t_2}\right) & = p\frac{\partial x}{\partial t_2}t_2 - \alpha x = & 0 \\ g\left(t_1,t_2,x,\frac{\partial x}{\partial t_1},\frac{\partial x}{\partial t_2}\right) & = p\frac{\partial x}{\partial t_1}t_1 - \beta x = & 0 \end{cases}$$

En ambos ejemplos, **la incógnita es una función** x que depende de una o varias variables. Además ambas ecuaciones o sistema de ecuaciones diferenciales representan **una relación** entre: la(s) variable(s) independiente(s) t (t_1, t_2), la función incógnita x, y las derivadas hasta de cierto orden de la función incógnita.

Definición 1 (Ecuación Diferencial)**.** Una ecuación diferencial es aquella ecuación que relaciona una o varias variables independientes $\mathbf{t}$, una función incógnita $x(\mathbf{t})$, y sus derivadas hasta de un cierto orden $x', x'', \cdots, x^{(n)}$. En general una ecuación diferencial se denota por:

$$F\Big(\mathbf{t}, x(\mathbf{t}), x'(\mathbf{t}), x''(\mathbf{t}), \cdots, x^{(n)}(\mathbf{t})\Big) = 0 \tag{4}$$

- Cuando la función incógnita x, depende de una sola variable real t, la ecuación diferencial es llamada Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) y la denotaremos por

  $$F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)} = \frac{dx}{dt^n}\right) = 0$$

  Si $\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \neq 0$, por el teorema de la función implícita, la EDO puede ser escrito en la forma

  $$\frac{dx}{dx^n} = f(t, x', x'', \cdots, x^{(n-1)})$$

  conocida como **forma normal** de una EDO.

- Cuando la función incógnita x, depende de varias variable $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$, la ecuación diferencial es llamada ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) y generalmente es denotada por

  $$F\left(t_1, t_2, \cdots, t_n, x(t_1, \cdots, t_n), \frac{\partial x}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial t_n}, \cdots\right) = 0$$

En este curso, estudiaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias *(EDO) prestando mayor interés en las técnicas de solución y comportamiento de las soluciones. Las técnicas para resolver una EDO pueden completar un curso de un año. En este curso, estudiaremos algunos tipos básicos, con especial énfasis en: Interpretación económica, algunos tipos de ecuaciones especiales comunes en economía aplicada, caracterización de ecuaciones diferenciales y el estudio de la estabilidad de las EDO más comunes en Economía. Los siguientes ejemplos ilustran una variedad de entornos económicos que pueden dar lugar a una EDO los cuales estamos interesados en estudiar las técnicas de solución.*

Ejemplo 3 (Acumulación de capital por parte de una empresa)**.** El capital social de una empresa evoluciona según la ecuación lineal de movimiento

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta \cdot k(t) \tag{5}$$

donde $i(t)$ es la tasa de inversión en el tiempo y δ es la tasa de depreciación instantánea.

Para encontrar el stock de capital en cualquier instante t, dado un stock inicial $k(0) = k_0$, se requiere resolver la EDO (5).

En este ejemplo la EDO está dada por la ecuación

$$F(t, k, k') = \dot{k} - i(t) + \delta \cdot k(t) = 0$$

cuya forma normal está dada por:

$$\dot{k} = i(t) - \delta \cdot k(t)$$

con condición inicial $k(0) = k_0$.

Ejemplo 4 (Acumulación de capital por un país)**.** Si el PBI per cápita está dado por la función de producción de forma intensiva

$$y(t) = f(k(t)),$$

y la inversión satisface la identidad de ingreso nacional para una economía cerrada

$$i(t) = \delta y(t)$$

Entonces, la ecuación para el movimiento del capital es

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) = \delta \cdot f(k(t)) - \delta \cdot k(t) \tag{6}$$

En este caso tenemos:

$$F(t, k, k') = \dot{k} - \delta \cdot f(k) - \delta \cdot k = 0$$

el cual resulta ser una EDO.

Ejemplo 5 (Emparejamiento del mercado laboral)**.** Sea L el número de trabajadores en la fuerza laboral, $u(t)$ la tasa de desempleo, y $v(t)$ la tasa de vacantes. Si los trabajadores y las vacantes se encuentran entre si mediante un proceso de coincidencia aleatoria mediante el cual el número total de coincidencias realizadas en el intervalo de tiempo Δt viene dado por la función de coincidencia

$$M \cdot \Delta t = M(u \cdot L, v \cdot L)\Delta t.$$

La función de coincidencia es creciente y cóncava en cada uno de sus argumentos, y homogénea de grado uno. Entonces, la tasa a la que se llenan las vacantes, expresada como una fracción de los desempleados, es

$$\frac{M}{u \cdot L}\Delta t = \frac{M(u \cdot L, v \cdot L)}{u \cdot L}\Delta t = \frac{(v \cdot L)M\left(\frac{u}{v}, 1\right)}{u \cdot L}\Delta t$$

$$\frac{M}{u \cdot L}\Delta t = \frac{v}{u}M\left(\frac{u}{v}, 1\right)\Delta t$$

Si el flujo hacia el desempleo ocurre en la tasa λ, en el intervalo de tiempo Δt, el número de trabajadores que quedan desempleados es $\lambda \cdot (1-u) \cdot \Delta t$. Por lo tanto, el cambio en el número de desempleados es

$$\Delta(u \cdot L) = \lambda \cdot (1-u) \cdot L \cdot \Delta t - M\Delta t$$
$$\Delta(u \cdot L) = \lambda \cdot (1-u) \cdot L \cdot \Delta t - \frac{v}{u} M\left(\frac{u}{v}, 1\right) u \cdot L \cdot \Delta t.$$

Dividiendo por $L \cdot \Delta t$ y haciendo $\Delta t \to 0$, obtenemos la ecuación

$$\dot{u}(t) = \lambda \cdot (1 - u(t)) - \frac{v}{u} \cdot M\left(\frac{u}{v}, 1\right) \cdot u(t) \tag{7}$$

el cual resulta ser una EDO.

Ejemplo 6 (Número de empresas en una industria)**.** Sea $p = f\left(\sum q_i\right)$ la demanda agregada, donde q_i es el producto de la empresa i. Si todas las empresas son idénticas entonces $p = f(nq)$, donde n es el número de empresas. Sea $c(q)$ la función costo, así las ganancias son $\pi = q \cdot f(nq) - c(q)$.

Si $q(n)$ el nivel de rendimiento de la empresa que maximiza las ganancias para cualquier n dado, y $\pi(n)$ las ganancias resultantes. Nuevas empresas ingresarán a la industria si las ganancias actuales exceden las ganancias normales, $\tilde{\pi}$, y las empresas establecidas abandonarán la industria cuando las ganancias están por debajo de lo normal. Sea $g(x)$ una función satisfaciendo $\operatorname{sing}(g(x)) = \operatorname{sing}(x)$ y $g(0) = 0$. Entonces, la evolución del número de empresas viene dado por

$$\dot{n}(t) = g(\pi(n(t)) - \tilde{\pi}) \tag{8}$$

Si $g(x)$ es una función monotóna creciente, entonces la ecuación de movimiento implica que la tasa de entrada o salida es mayor cuanto más ganancias actuales sean de la tasa normal.

Ejemplo 7 (Mercado financiero: Dinámica de demandantes y oferentes)**.** La dinámica en el que los demandantes y los oferentes ajustan sus cantidades demandadas y ofrecidas dependiendo del precio y de los cambios en el nivel de precios, es el mercado financiero. Las cantidades demandadas en cada momento t depende del nivel de precios en cada instante t y de su tendencia en un intervalo de tiempo h, es decir, $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}\left(p(t), \frac{p(t)-p(t-h)}{h}\right)$. Por otro lado, la oferta también depende de las mismas variables, esto es $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}\left(p(t), \frac{p(t)-p(t-h)}{h}\right)$.

El comportamiento de los precios está determinado por el exceso de demanda en el intervalo de tiempo en el que reaccionan los agentes, es decir

$$p(t+h) - p(t) = \theta \cdot h \cdot (\mathcal{D}(t) - \mathcal{O}(t))$$

donde θ es un parámetro de ajuste. Si el intervalo de reacción tiende a cero la ecuación anterior se convierte en

$$\dot{p} = \theta \cdot (\mathcal{D}(p(t), \dot{p}(t)) - \mathcal{D}(p(t), \dot{p}(t))) \,. \tag{9}$$

Está ecuación rige el comportamiento de los precios en cada instante y resolverla determinará los niveles de precios en casa instante $p = p(t)$.

Definición 2. Dada la EDO $F(t, x(t), x'(t), x''(t), \cdots, x^{(n)}(t)) = 0$

- Llamamos **orden** de la EDO al orden de la derivada más elevada que en ella aparece. Por ejemplo:
  - La EDO $F(t, x, x', x'') = 2t + 3x + 5x' - 2x'' = 0$ es de orden 2.
  - Las ecuaciones diferenciales ordinaria $\dot{k}(t) = i(t) - \delta \cdot k(t)$, es de orden uno o de primer orden.
  - Las ecuaciones diferenciales ordinaria $\ddot{x}(t) + \dot{x} = kx(t - x)$, es de orden segundo orden.
- Llamamos **grado** de la EDO a la mayor potencia del orden de la EDO. Por ejemplo:
  - La EDO $2t + x + 5\dot{x} - 2(\ddot{x})^3 - \ddot{x} = 0$ es de orden 2 y tercer grado.
  - Las EDO $\dot{k}(t) = i(t) - \delta \cdot k(t)$, es de orden y grado uno.
- La EDO se llama **autónoma** cuando F no depende de t, es decir es de la forma

$$F(x(t), x'(t), x''(t), \cdots, x^{(n)}(t)) = 0$$

  o lo mismo que f, en la forma normal, no depende de t, es decir,

$$x^{(n)}(t) = \frac{dx}{dt^n} = f(x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)).$$

  Por ejejmplo:
  - Las ecuaciones diferenciales ordinaria $\dot{k}(t) - \delta \cdot k(t) + 3k^2(t) + 3 = 0$ es autónoma, pues f , en su forma normal

$$\dot{k}(t) = f(k) = \delta \cdot k - 3k^2 - 3,$$

    no depende de t.
  - La EDO $2t + 4x + 6x' - 2x'' = 0$ no es autónoma, pues f, en su forma normal

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) = t + 2x + 3\dot{x},$$

    depende de t

En general, resulta **fácil comprobar si una función $\varphi(t)$ es solución de una EDO**, basta sustituir en la EDO la función y las derivadas de ella hasta el orden de la EDO. Sin embargo, el proceso inverso (dada una EDO, hallar su solución) no es tarea fácil, existen métodos que permiten calcular explícitamente la solución de alguna EDo especiales. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 8. Verifique si la función $\varphi(t) = e^{2t}$, es solución de la ecuación diferencial $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Solución. Tenemos una EDO de segundo orden. Derivando, hasta de orden 2, la función φ:

$$\varphi' = 2e^{2t}, \ \ \varphi''(t) = 4e^{2t}.$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\varphi'' - 5\varphi' + 6\varphi = 4e^{2t} - 10e^{2t} + 6e^{2t} = 0$$

Por tanto $\varphi(t) = e^{2t}$ satisface la EDO con lo cual es solución de la EDO. □

Ejemplo 9. Verifique si la función $\phi(t) = e^{3t}$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Solución.

$$\phi' = 3e^{3t}, \ \ \phi''(t) = 9e^{3t}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\phi'' - 5\phi' + 6\phi = 9e^{3t} - 15e^{3t} + 6e^{3t} = 0$$

es decir, ϕ satisface la EDO y por lo tanto $\phi(t) = e^{3t}$, es solución de la EDO. □

Ejemplo 10. Verifique que la combinación lineal

$$x(t) = c_1\varphi(t) + c_2\phi(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

es solución de la ecuación diferencial $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Solución.

$$x' = 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{3t}, x''(t) = 4c_1e^{2t} + 9c_2e^{3t}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$x'' - 5x' + 6x = 4c_1e^{2t} + 9c_2e^{3t} - 10c_1e^{2t} - 15c_2e^{3t} + 6c_1e^{2t} + 6c_2e^{3t} = 0$$

Es decir $x(t)$ satisface la EDO y por lo tanto $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$, es solución de la EDO. □

Proposición 3. *Cualquier combinación lineal de soluciones de una EDO, también es solución de la EDO.*

Veamos ahora el proceso inverso: dada una EDO ¿cómo podemos hallar una solución?. Consideremos la ecuación diferencial más simple

$$\dot{x} = f(t).$$

La cual es una EDO de primer orden no autónoma. Recordando integrales, estudiado en su primer curso de matemáticas, esta ecuación se resuelve fácilmente,

$$x(t) = \int f(t)dt = F(t) + C$$

o bien

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

donde s es una variable auxiliar y t_0 es un valor inicial. En un caso existen infinitas soluciones (una por cada constante) y en el segundo caso existe solo una solución. Por tanto debemos distinguir entre:

- **Solución general** de una EDO: conjunto de todas sus soluciones.
- **Solución particular** de una EDO: cualquiera de sus soluciones que satisfacen la condición inicial
$$x(t_0) = x_0.$$

En general, la solución general depende de unos parámetros cuya determinación a partir de unas condiciones iniciales da lugar a una solución particular.

Ejercicio 4. Determine la solución general de las siguientes EDO

1. $\dot{x} \cdot t - 2x = 0$
2. $k' \cdot k + t = 0$
3. $\dot{y} = c \cdot y$, donde c es una constante.